Exposé 20

Etude de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où $a, b, z \in \mathbb{C}$. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

0 - Pré-Requis :

- nb complexes (affixe, module, arguments).
- propriétés des similitudes
- expression complexe des transformations (Rappel expo 19 : ce sont des bijections)
- barycentre, cocyclicité, produit scalaire
- Thm de l'arc capable

On se place dans P un plan affine euclidien orienté.
Soit M, A, B trois points de P d'affixes respectives z, a, b

I Etude de l'application $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$

1) Bijectivité.

$D_f = \mathbb{C} \setminus \{b\}$

Si $a = b$: alors f est constante égale à 1.

Thm : Si $a \neq b$, l'application $f : \mathbb{C}\setminus\{b\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$ est une bijection de fonction réciproque $f^{-1}(z) = \dfrac{a-bz}{1-z}$

$\mathbb{I}$ $Z = \dfrac{z-a}{z-b} \iff Z(z-b) = z-a \iff z = \dfrac{a-bZ}{1-Z}$ $\mathbb{I}$ On a bien l'unicité de l'antécédent, bijection car on a trouvé f et réciproque

2) Interprétation géométrique :

Vu dans un exposé précédent propriété module et argument.

* Module : $|f(z)| = \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \dfrac{|z-a|}{|z-b|} = \dfrac{MA}{MB}$

* Argument : $\arg(f(z)) = \arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = (\vec{BM}, \vec{AM})\,[2\pi] = (\vec{MA}, \vec{MB})\,[2\pi]$

3) Propriétés :

Thm : f transforme les droites et les cercles en droites ou cercles.

$\mathbb{I}$ On va décomposer f : $f(z) = \dfrac{z-a}{z-b} = 1 + \dfrac{b-a}{z-b}$

$$z \xmapsto{\varphi_1} z-b \xmapsto{\varphi_2} \frac{1}{z-b} \xmapsto{\varphi_3} \frac{b-a}{z-b} \xmapsto{\varphi_4} 1 + \frac{b-a}{z-b} = f(z)$$

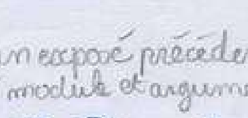
* $\varphi_1 : z \mapsto z-b$ est une translation donc l'image d'une droite est une droite // ...

* $\varphi_2 : Z \mapsto \dfrac{1}{Z}$ cette application transforme droite et cercle en droite ou cercle.
En effet soit une droite passant par l'origine

L'ensemble des pts M de cette droite est $z = kb$ où $M(z)$, $\vec{v}(b)$ un vect directeur de cette droite. $k \in \mathbb{R}^*$

$\arg(z) = \arg(b) = \text{cte}$

$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{1}{kb}\right) = -\arg(b) = \text{cte}$ ie $\varphi_2(D)$ est une droite.



Pour le cercle même raisonnement :
On considère un cercle de centre l'origine et rayon R
ie $\mathcal{C} = \{M(z) \mid |z| = R\}$
$\varphi_2(\mathcal{C}) = ?$ Soit $z \in \mathcal{C}$ ie $|z| = R$ $\quad \varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ et $|\varphi_2(z)| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R}$

Voir Démo

Donc $\varphi_2(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{R}$

Donc l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine est un cercle
d'une droite passant par l'origine est une droite / à (Ox)
Par contre l'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O
d'un cercle passant par O est une droite ne passant pas par O

* $\varphi_3 : Z \mapsto \alpha Z$, $\alpha = b - a \in \mathbb{C}$ donc φ_3 est une similitude d'où conservation (composé homothétie rotation)
* $\varphi_4 : Z \mapsto Z + 1$, translation donc conservation ...

$\Rightarrow f$ composée d'applications qui transforment cercle/droite en cercle/droite.]

II. Lignes de niveau :

1) Pour le module

Déf : On appelle ligne de niveau du module de f associée au réel k,
$$E_k = \left\{ z \in \mathbb{C}\setminus\{b\} \;\middle|\; \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \right\}$$
~~$= \{M(z) \in P \setminus B \mid MA = kMB\}$~~

Thm : Si $k < 0$, $E_k = \emptyset$
Si $k = 0$, $E_k = \{a\}$
Si $k = 1$, E_k = médiatrice de $[AB]$
Si $k \neq 1$, $k > 0$, E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$
où $I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,k)\}$ et $J = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-k)\}$

[* $k = 1$ $\quad z \in E_1 \Leftrightarrow MA = MB$ cela montre que E_1 est la médiatrice de $[AB]$

* $k \neq 1, k > 0$ $\quad z \in E_k \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow \vec{MA}^2 = k^2 \vec{MB}^2$
$$\Leftrightarrow (\vec{MA} + k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - k\vec{MB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (1+k)\vec{MI} \cdot (1-k)\vec{MJ} = \vec{0} \quad \text{où } I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,k)\},\ J = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-k)\}$$
$$\Leftrightarrow (1+k)(1-k)\, \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$$

Donc E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$

2) Pour l'argument.

Déf : La ligne de niveau de l'argument de f associée au réel k
est $F_k = \left\{ z \in \mathbb{C}\setminus\{b\} \;\middle|\; \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k \,[2\pi] \right\}$

$z \in F_\alpha \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha\,[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z-a) - \arg(z-b) = \alpha\,[2\pi]$
$$\Leftrightarrow (\vec{i}, \vec{MA}) - (\vec{i}, \vec{MB}) = \alpha\,[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow (\vec{MB}, \vec{MA}) = \alpha\,[2\pi]$$

Thm : si $\alpha = 0\ [2\pi]$ $F_\alpha = (AB) \setminus [AB]$

si $\alpha = \pi\ [2\pi]$ $F_\alpha =]AB[$

si $\alpha \neq 0\ [\pi]$ alors F_α est l'arc capable de (A,B) associé à α

[[Si $\alpha = 0\ [2\pi]$ ou $\alpha = \pi\ [2\pi]$ évident.

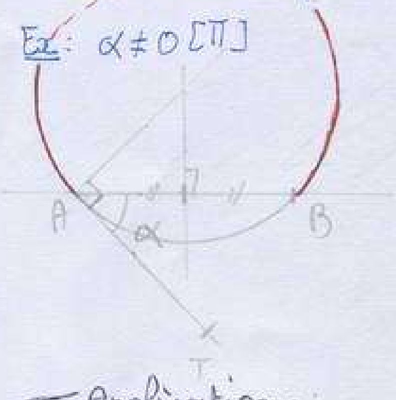
Si $\alpha \neq 0\ [\pi]$

$M \in F_\alpha \iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \alpha\ [2\pi]$

Soit T tq $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\ [2\pi]$

D'après le thm de l'arc capable. Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par A et B tangent en A à la droite (AT) alors F_α est l'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$ de $\mathcal{C}$ contenu dans le demi plan ouvert de frontière (AB) ne contenant pas T.]]

Ex : $\alpha \neq 0\ [\pi]$



Demi plan de frontière (AB) ne contenant pas T

$- F_\alpha$

$AB \perp AM$ ie $(AM, AB) = \frac{\pi}{2}$ ie $\mathrm{Arg}\ \frac{b-a}{z-a}$

III Applications :

1) Alignements :

Mq A, B, M alignés ssi $f(z) \in \mathbb{R}$ $f(z)\ \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ ie $\mathrm{Arg}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0\ [\pi]$

ie $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0\ [\pi]$ ie alignés.

2) Orthogonalité

$(AB) \perp (AM) \iff f(z)$ est un imaginaire pur.

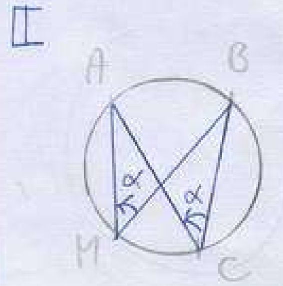
$(AM) \perp (BM) \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ie $\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha i$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ie imaginaire pur.

3) Cocyclicité

$M(z)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ non alignés sont cocycliques

$\iff f(z)/f(c) \in \mathbb{R}$

[[



M, A, B, C cocycliques

ie $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})\ [\pi] \iff \arg\underbrace{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}_{f(z)} = \arg\underbrace{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}_{f(c)}\ [\pi]$

$\iff \arg\left(\underbrace{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}_{f(z)} \div \underbrace{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}_{f(c)}\right) = 0\ [\pi]$

$\iff f(z)/f(c) \in \mathbb{R}$]]

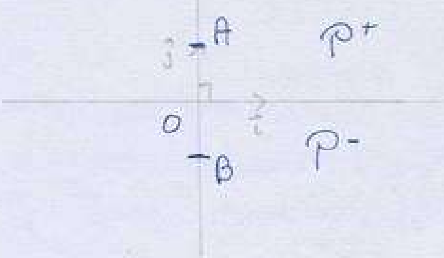
Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

Mq f envoit le demi plan supérieur sur le disque unité ouvert.

Soit $M(z)$, $A(i)$, $B(-i)$ Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :



$|f(z)| = \frac{MA}{MB}$ (ligne de niveau pour le module)

On a $(O, \vec{i})$ médiatrice du segment $[AB]$

On a $M \in$ demi plan supérieur ie $M \in P^+$

or on a vu (Regionnement du plan par une médiatrice) :

$P^+ = \{M \in P \mid MA < MB\}$

$\Delta = \{M \in P \mid MA = MB\}$

$P^- = \{M \in P \mid MA > MB\}$

Donc si $M \in P^+$, alors $|f(z)| < 1$

D'où le résultat ($f(M)$ appartient au disque unité ouvert).

Rappel : Thm de l'arc capable :

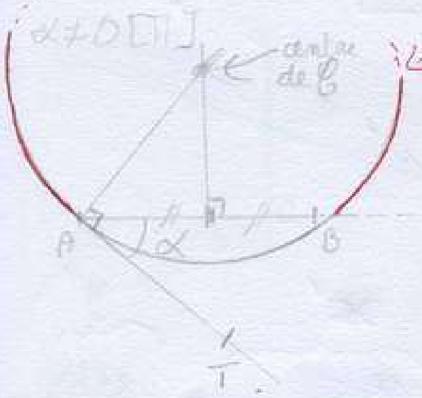
Thm : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, A et B 2 pts distincts. $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \setminus \{A,B\} \text{ tq } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha [2\pi]\}$

i) Si $\alpha = 0 [2\pi]$ alors $\Gamma = (AB) \setminus [AB]$

ii) Si $\alpha = \pi [2\pi]$ alors $\Gamma =]AB[$

iii) Si $\alpha \neq 0 [\pi]$ alors soit T un pt distincts de A et B tq $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha [2\pi]$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par A et B tangent en A à la droite (AT) alors Γ est l'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$ de $\mathcal{C}$ contenu dans le demi plan ouvert de frontière (AB) ne contenant pas T.

Exemple : ici $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi [2\pi]$ nécessairement $M \in]AB[$



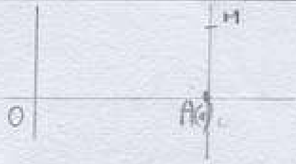
ensemble solution (car demi plan de frontière (AB) ne contenant pas T...)

Pour tracer le cercle $\mathcal{C}$ tangent en A à AT passant par A et B ?

* Tout d'abord le centre du cercle $\mathcal{C}$ est sur la droite $\perp$ à (AT) passant par A.
* Ensuite $A, B \in \mathcal{C}$ donc le centre du cercle $\mathcal{C}$ appartient à la médiatrice de [AB]

Droite ne passant pas par l'origine.

1er cas : Droite parallèle à l'axe des ordonnées.



Donc equation de la droite $x = a$

ie Soit $M(z) \in D$ $\quad \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$

$= a + yi$ avec $y \in \mathbb{R}$.

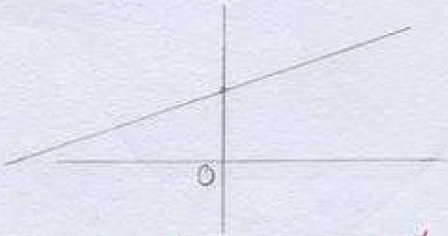
$$z' = x' + iy' = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+yi}$$

$$= \frac{a - yi}{a^2+y^2} = \frac{a}{a^2+y^2} - \frac{y}{a^2+y^2} i \Rightarrow x' = \frac{a}{a^2+y^2} \text{ et } y' = \frac{-y}{a^2+y^2}$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2}{(a^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2+y^2)^2} = \frac{a^2+y^2}{(a^2+y^2)^2} = \frac{1}{(a^2+y^2)} = \frac{x'}{a}$$

donc $x'^2 + y'^2 = \frac{x'}{a} \Leftrightarrow \boxed{\left(x' - \frac{1}{2a}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{4a^2}}$ Donc cercle.

2ème cas :



Droite qui ne passe pas par l'origine

$D : y = ax + b$

Soit $M(z) \in D$

$z = x + i(ax+b) \quad x \in \mathbb{R}$.

$M(z')$

$$z' = x' + iy' = \frac{1}{x + (ax+b)i} = \frac{x - (ax+b)i}{x^2 + (ax+b)^2} = \overbrace{\frac{x}{x^2+(ax+b)^2}}^{x'} - \overbrace{\frac{(ax+b)i}{x^2+(ax+b)^2}}^{y'}$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{(x^2+(ax+b)^2)^2} + \frac{(ax+b)^2}{(x^2+(ax+b)^2)^2} = \frac{1}{x^2+(ax+b)^2}$$

Cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\frac{1}{x^2+(ax+b)^2} = \alpha x' + \beta y'$

Dc $\frac{1}{x^2+(ax+b)^2} = \frac{\alpha x}{x^2+(ax+b)^2} - \frac{\beta(ax+b)}{x^2+(ax+b)^2}$

$$= \frac{(\alpha - \beta a)x - \beta b}{x^2+(ax+b)^2}$$

ie $\begin{cases} \alpha - \beta a = 0 \\ -\beta b = 1 \end{cases}$ ie $\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{b} \\ \beta = -\frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x'^2 + y'^2 = -\frac{a}{b} x' - \frac{y'}{b}}$

$= \text{- - - -}$

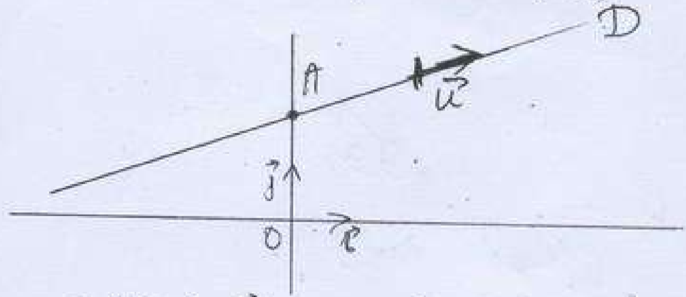
$$= \left(x' + \frac{a}{2b}\right)^2 + \left(y' + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{a^2+1}{4b^2}$$

Donc cercle

Thm : $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ L'image d'une droite ou d'un cercle est une droite ou un cercle

I Cas des droites ne passant pas par l'origine.

Cas d'une droite non parallèle à $(O,\vec{j})$



Donc $\exists A \in (O,\vec{j})$ et tq $A \in D$ A a pour coordonnées $(0, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$

A a pour affixe $z_A = ia$

La droite $D(A, \vec{u})$ est l'ensemble des pts M tq $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

où $\vec{u}$ a pour affixe $\alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$z_M - z_A = \lambda(\alpha + i\beta)$$

$$z_M = \lambda\alpha + i(\lambda\beta + a)$$

$$\frac{1}{z_M} = z'_M = \alpha' + i\beta' = \frac{1}{\lambda\alpha + i(\lambda\beta + a)} = \frac{\lambda\alpha - i(\lambda\beta + a)}{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2}$$

$$\alpha' + i\beta' = \underbrace{\frac{\lambda\alpha}{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2}}_{\alpha'} + i\underbrace{\frac{-(\lambda\beta + a)}{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2}}_{\beta'}$$

$M' \in \mathcal{C}$?

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \frac{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2}{[(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2]^2} = \frac{1}{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta + a)^2} = \frac{\alpha'}{\lambda\alpha}$$

d'où $\boxed{\left(\alpha' - \frac{1}{2\lambda\alpha}\right)^2 + \beta'^2 = \frac{1}{4\lambda^2\alpha^2}}$ équation cercle.

Rq $\alpha \neq 0$ car D non parallèle à $(O,\vec{j})$ et $\lambda \neq 0$ par déf de $M \in D$.