Niveau : Terminal ES.

Exposé 2 :

Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation des graphes, orientés ou non.

0- Pré-Requis :

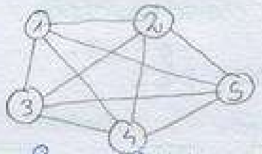
- Calcul matriciel
- Proba conditionnelles.

I Organisation d'un tournoi (On va introduire des généralités sur les graphes)

Problème 1 : Organiser un tournoi avec 5 équipes. Sachant que chaque équipe en rencontre 4 différentes. Combien faut il organiser de matchs ?

Solution : On va tracer un graphe représentant le tournoi.

les sommets ⟺ Equipes
les arrêtes ⟺ les matchs.



⟹ Le nombre de matchs correspond au nombre d'arrêtes.
Ici : 10

Rq : L'ordre du graphe est 5 (nb de sommets)
- Les sommets sont adjacents 2 à 2 (car 2 sommets qcq st reliés par une arrete).
- Le graphe est complet car tous les sommets sont reliés 2 à 2.

Problème 2 : On organise un tournoi avec 5 équipes. Mais chaque équipe rencontre 3 équipes différentes. Est ce possible ?

Def : Le degré d'un sommet est le nombre d'arrête dont ce sommet est une extrémité.

Reformulation du problème : chercher un graphe ayant 5 sommets de degré 3.

Prop : La somme des degrés des sommets d'un graphe vaut deux fois le nombre d'arrêtes

[1 arrête ⟺ 2 sommets.]

Si un tel graphe existait alors la somme des degrés de ces sommets est $5 \times 3 = 15$

Donc impossible (car 15 pas divisible par 2).

II Problèmes d'incompatibilité. (On va introduire la notion de coloration d'un graphe).

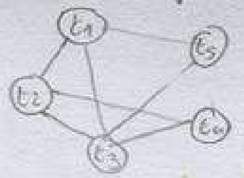
Problème 3 : Ds une chaîne de Montage, pour fabriquer un objet il faut effectuer 5 taches sachant que chacune des taches nécessite l'utilisation d'une ou plusieurs des cinq machines de l'atelier. Temps minimal pour effectuer la fabrication ?

taches $= \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ machines $= \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$

$t_1 \to m_1, m_3$ et m_5
$t_2 \to m_1$ et m_2
$t_3 \to m_2, m_3$ et m_5
$t_4 \to m_2$ et m_4
$t_5 \to m_5$

sommets ⟺ taches
arrêtes ⟺ incompatibilité.

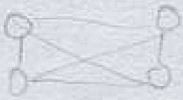
On va tracer le graphe des incompatibilités.



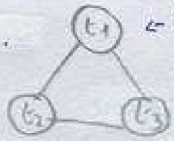
Déf: Δ, le nombre chromatique, est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorer un graphe, sachant que 2 sommets adjacents ne peuvent avoir la même couleur.

Déf: graphe complet ⟶ tous les sommets sont adjacents 2 à 2

Exemple. 4 sommets

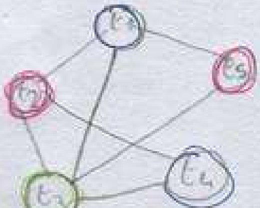


Déf: Sous graphe d'un graphe G, graphe composé de sommets de G et de toutes les arrêtes qui relient ces sommets

! 

← Sous graphe complet de notre exemple.

Donc $\Delta \geq 3$ (car Δ de graphe $= 3$ puisque complet et 3 sommets)



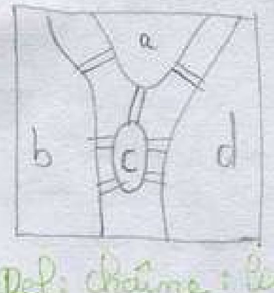
De plus $\Delta \leq 3$ par coloration

Donc $\Delta = 3$, Il faut effectuer au minimum 3 étapes.

⟹ Application : en géographie, coloration des cartes...

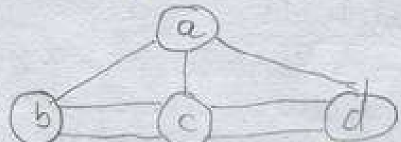
III Existence d'un chemin :

Problème 4 : Pont de Konigsberg. Est-il possible de parcourir la ville de Koninsberg en empruntant chacun des sept pont une et une seul fois.



Sommets ⟶ Iles

arrêtes ⟷ ponts.



Déf: Chaîne : liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.

Déf: Chaîne Eulérienne : chaîne qui contient une et une seule fois chaque arrête du graphe.

Déf: Cycle Eulérien : chaîne eulérienne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Def : Graphe connexe : s'il existe un chemin entre deux sommets qcq du graphe (ie une chaîne)

<u>Reformulation</u> : du problème. Existe-t-il une chaîne Eulerienne ou un cycle Eulerien ?

<u>Thm</u> : (Euler). G étant un graphe connexe $P_1 \Leftrightarrow P_2$ et $P_3 \Leftrightarrow P_4$

P_1 : Tous les sommets de G ont de degré pair

P_2 : G admet un cycle Eulérien.

P_3 : Deux sommets (et 2 seulement) A et B de G sont de degré impair.

P_4 : G admet une chaîne Eulérienne d'extrémités A et B.

Solution : Notre graphe est connexe mais tous les sommets sont de degré impair. (ie 4) donc pas de chaînes ou cycles eulériens. Donc pas de solution à ce problème.

<u>IV Problème de Probabilité Conditionnelle</u> (Utilisation d'un graphe probabiliste)

<u>Problème 5</u> : Probabilité d'atteindre une cible au $10^{\text{ème}}$ lancer ?

Sachant : $n > 0 \begin{cases} A_n \text{ la cible est atteinte au } n^{\text{ième}} \text{ lancer.} \\ B_n = \overline{A_n} \end{cases}$

$P(A_1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$

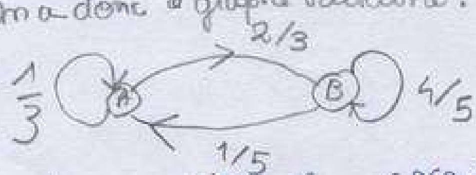
et $P(A_{n+1} | A_n) = \frac{1}{3}$ $\quad P(B_{n+1} | A_n) = \frac{2}{3}$

$P(A_{n+1} | B_n) = 1/5$ $\quad P(B_{n+1} | B_n) = 4/5$

<u>Def</u> Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet donné vaut 1.

La matrice de Transition M d'un graphe probabiliste a pour terme général m_{ij} le poids de l'arête orientée allant du sommet i au sommet j et 0 sinon.

On a donc le graphe suivant :



et la matrice de transition M :

$$M = \begin{array}{cc} A \to A & A \to B \\ \end{array}$$
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} B \to A & B \to B \end{array}$$

$P_2 = P_1 \times M$

$P_3 = P_2 \times M = P_1 \times M^2$

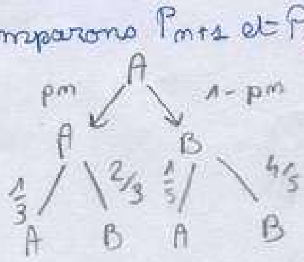
$\vdots$

$P_n = P_1 \times M^{n-1}$

On note pour $n > 0$ $\quad P_n = (P(A_n), P(B_n)) = (p_n, 1-p_n)$

$P_1 = (1/2, 1/2)$

Comparons P_{n+1} et P_n :



$\leftarrow n^{\text{ième}}$

$\leftarrow n+1$ lancée

$\underbrace{p_{n+1}}_{\text{cible atteinte au } n+1 \text{ième lancé}} = P(A_{n+1} | A_n) \times p_n + P(A_{n+1} | B_n) \times (1-p_n)$

$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n)$.

et de $\underbrace{1 - p_{n+1}}_{\text{cible pas atteinte au } n+1 \text{ ème lancé}} = P(B_{n+1} | A_n) \times p_n + P(B_{n+1} | B_n) \times (1 - p_n)$

$= 1 - p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n)$

Donc $P_{n+1} = P_n \times M = P_1 \times M^n = [1/2 \quad 1/2]\ M^n \simeq (0{,}2307 \quad 0{,}7692\ldots)$

Thm : Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition n'admet pas de 0. P_n converge vers un état P indépendant de P_0. De plus $P = P \times M$. (Il suffit de résoudre le système)

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \qquad P = (x \,;\, y)$$

$$(x \quad y) = \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{5}y \quad \tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{5}y\right)$$

$$\begin{cases} x = 1/3\,x + 1/5\,y \\ y = 2/3\,x + 4/5\,y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2/3\,x = \frac{1}{5}y \\ \frac{1}{5}y = \frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{3}x = y$$

De plus $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{10}{3}x = 1.$

$\frac{13}{3}x = 1 \quad x \Leftrightarrow \frac{3}{13} = 0{,}23$

$\boxed{y = \frac{10}{13}} = 0{,}7692\ldots$