Exposé 19

Représentation graphique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$, $z \mapsto \bar{z}$ où $a, b \in \mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'applications à l'étude des configuration géométrique du plan

0. Pré-requis :

- Ecriture algébrique et trigonométrique d'un complexe.
- Translations, rotations, réflexions et homothéties.
- Angles orientés

On se place dans $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien orienté ($\vec{P}$ plan vect associé)

On munit P d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

I Représentation géométrique d'un nombre complexe :

1) Affixe d'un point, d'un vecteur :

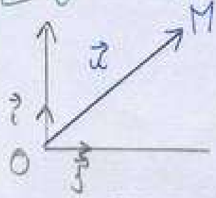
L'application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow P$, $z = x+iy \mapsto M(x,y)$ est une bijection qui permet d'identifier P à $\mathbb{C}$

Donc $\forall M \in P, \exists ! z \in \mathbb{C}$ tq $M = \varphi(z)$ (ie a tout pt M du plan on associe un unique nb complexe z.

[Def : Le plan P identifié à $\mathbb{C}$ via φ est appelé plan complexe.
Le complexe $z = x+iy$ est appelé affixe du point $M(x,y)$
Le point $M(x,y)$ est appelé image du complexe $z = x+iy$

Notation : On note $z = \text{aff}(M)$. On note $M(z)$ le point M d'affixe z.

[Def : On appelle affixe de $\vec{u} \in \vec{P}$, l'affixe du point M vérifiant $\vec{u} = \vec{OM}$



On a $\text{aff}(\vec{u}) = \text{aff}(M)$ avec $\vec{OM} = \vec{u}$

2) Propriétés :

Prop 1 : i) $\forall M, M' \in P$ $\quad M = M' \iff \text{aff}(M) = \text{aff}(M')$

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$ $\quad \vec{u} = \vec{v} \iff \text{aff}(\vec{u}) = \text{aff}(\vec{v})$

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$ $\quad \text{aff}(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \lambda \, \text{aff}(\vec{v})$

Rq : Les constructions géométriques des complexes $z + z'$ et λz ($\lambda \in \mathbb{Q}$) se déduisent de la propriété (iii) et de la règle du parallélogramme.

Prop 2 : (Affixe d'une différence)

~~Soit M d'affixe z~~ Soit $M(z) \in P$, $M(z') \in P$ alors $\text{aff}(\vec{MM'}) = z' - z$

[$\text{aff}(\vec{MM'}) = \text{aff}(\vec{MO} + \vec{OM'}) = \text{aff}(\vec{OM'} - \vec{OM}) = \text{aff}(\vec{OM'}) - \text{aff}(\vec{OM}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$
$= z' - z$]

3) Module et argument :

Soit $M(z), M'(z') \in \mathcal{P}$

a) Module

[Par définition $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = OM$ i.e $|z|$ est la longueur de OM où M est l'image du complexe z.

En particulier $MM' = |z - z'|$

[On a vu que $\text{Aff}(\overrightarrow{MM'}) = z' - z$ ...]

b) Argument : ⚠ Il faut que le complexe soit non nul pour parler d'argument.

[Par définition $\arg(z) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$

En particulier $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})\ [2\pi]$ $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$

[$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

$= \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$

$= \arg\left(\frac{z'}{z}\right)\ [2\pi]$]

II Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \bar{z}$

~~1) Etude de $z \mapsto z+b$, $b \in \mathbb{C}$~~ Si on considère une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on peut associer à cette fonction f la transformation ponctuelle T qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$

$T : M(z) \longrightarrow M'(f(z))$

1) $f_1 : z \longmapsto z+b$, $b \in \mathbb{C}$

Soit φ_1 la transformation ponctuelle associée à f_1

$\varphi_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M(z) \to M'(z')$ où $z' = z+b$

Prop: φ_1 est la translation de vecteur $\vec{u}$ où $b = \text{aff}(\vec{u})$

[$\text{aff}(\overrightarrow{MM'}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M) = z' - z = z + b - z = b = \text{aff}(\vec{u})$

d'où $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$]

2) $f_2 : z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}^*$

Soit φ_2 la transformation ponctuelle associée à f_2 :

$\varphi_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M(z) \mapsto M'(f_2(z))$ où $f_2(z) = az$

Prop: Si $a = 1$, $\varphi_2 = Id_{\mathcal{P}}$

Si $a \neq 1$, φ_2 est une similitude directe de centre O, de rapport $|a|$, et d'angle $\arg(a)\ [2\pi]$

II i) évident.

ii) Point fixe de f_2 :

$z = az \Leftrightarrow z(1-a) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ car $a \neq 1$

Donc O est le seul pt fixe

$z' = az \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |a||z| \\ \arg z' = \arg(a) + \arg(z) \ [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = |a| OM \\ \arg z' - \arg z \underset{\text{vu prec}}{=} (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \arg a \ [2\pi] \end{cases}$]

On en déduit que l'application $z \mapsto az$ est la composée de l'homothétie de centre O et rapport $|a|$ et de la rotation $r_{O, \arg(a)}$

Rq : Si $a \in \mathbb{R}^*$ $f_2 = h_{O,|a|}$

Si $|a| = 1$ $f_2 = r(O, \theta)$ où $\theta = \arg a \ [2\pi]$.

3) $f_3 : z \mapsto \bar{z}$

$\varphi_3 : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$

$M(z) \mapsto M'(f(z))$ où $f(z) = \bar{z}$

Prop : φ_3 est la réflexion d'axe (Ox)

[Le symétrique du point $M(x,y)$ par rapport à (Ox) est bien le point de coordonnées $(x;y)$]

III Applications :

Exercice 1 : • Montrer que si $(a,b) \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\} \times \mathbb{C}$, l'application $f(z) = az + b$ est la similitude directe de centre Ω, d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a) [2\pi]$

• Montrer ensuite sa réciproque : toute similitude directe de centre $\Omega(w)$ de rapport k et d'angle θ s'écrit $f(z) = ke^{i\theta}(z - w) + w$

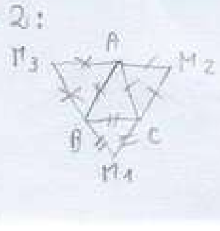
Exercice 2 : (Théorème de Napoléon)

Soit ABC un triangle quelconque. Les pts M_1, M_2 et M_3 sont extérieurs au triangle et tels que les triangles ABM_1, BCM_2 et ACM_3 sont équilatéraux. On désigne par $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ les centres de gravités respectifs de ces triangles. Montrer que le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est équilatéral et possède le même centre de gravité que le triangle ABC.

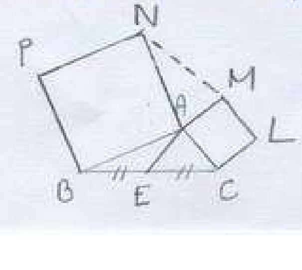
Exercice 3 : (Un triangle et deux carrés)

Soit ABC un triangle quelconque. On construit les carrés ACLM et ANPB extérieurement à ce triangle et l'on appelle E le milieu de [BC]. Prouver que (EA) est perpendiculaire à (MN) et que MN = 2EA.

Exo 2 :



Exo 3 :



Exposé 19 : Démos :

Propriété 1 :

[i) Découle du fait que φ est une bijection

ii) Soit $M, N \in \mathcal{P}$ tq $\vec{OM} = \vec{u}$ et $\vec{ON} = \vec{v}$ $\quad$ aff$(\vec{u})$ = aff(M) et aff$(\vec{v})$ = aff(N)
et on applique i)

iii) $\vec{u}(a,b)$ $\vec{v}(c,d)$ $\quad \lambda\vec{u}+\vec{v}(\lambda a + c, \lambda b + d)$

$$\text{aff}(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = (\lambda a + c) + i(\lambda b + d) = \lambda(a+ib) + (c+id) = \lambda\,\text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$]

Exercice 1 :

- L'unique point invariant de f s'obtient en résolvant :

$$w = aw + b \iff w = \frac{b}{1-a}$$

d'où $z' - w = az + b - \frac{b}{1-a} = az - a\frac{b}{1-a} = a(z - w)$

La formule $Z = z - w$ définit un chgt de RON direct par translation

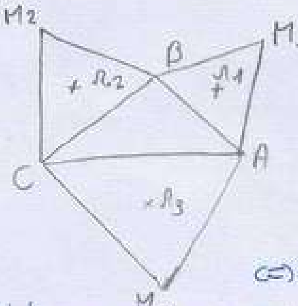
La nouvelle origine du repère est $\Omega(w)$

f est donnée par $Z' = aZ$ dans le nouveau repère.

(En effet, on a $z' - w = a(z - w)$ En posant $Z = z - w$
on obtient $Z' = aZ$ $\quad$ car $f(w) = w \Rightarrow Z' = z' - w$)

C'est donc bien la similitude (Vu en II) de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg|a|$

Exercice 2 :



Supposons le triangle ABC direct et passons aux affixes.

inter médiane

⊛ Si Ω_1 est le centre de gravité du triangle ABM_1,

$$a - w_1 = j(b - w_1) \quad \text{avec } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$(\vec{w_1B}, \vec{w_1A}) = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \iff \frac{a-w_1}{b-w_1} = j$

$\iff w_1 = \frac{jb-a}{j-1}$ De même $w_2 = \frac{jc-b}{j-1}$ et $w_3 = \frac{ja-c}{j-1}$ $\quad$ où $g = \text{Aff}(G)$, $g' = \text{Aff}(G')$

d'où $w_1 + w_2 + w_3 = a+b+c$
donc égalité des barycentres des 2 tr.

($G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ ie $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{0}$
$G' = \text{Bar}\{(\Omega_1,1),(\Omega_2,1),(\Omega_3,1)\}$ ie $\vec{G'A}+\vec{G'B}+\vec{G'C} = \vec{0}$)
en affixe $a+b+c-3g = w_1+w_2+w_3-3g'$ ie $g = g'$ ie $G = G'$

⊛ On a $\boxed{e^{i\pi/3} = -j^2 \quad -j^2 = 1 + j}$

$1 + j + j^2 = 0$ car comme racine 3ième unité.

$$w_2 - w_3 = \frac{1}{j-1}(j(c-a) + c - b)$$

$$-j^2(w_1 - w_3) = \frac{-j^2}{j-1}[j(b-a) + c - a] = \frac{1}{j-1}[-j^3(b-a) - j^2(c-a)]$$

$$= \frac{1}{j-1}[a - b + (1+j)(c-a)]$$

$$= \frac{1}{j-1}[c - b + j(c-a)] = w_2 - w_3$$

Donc $w_2 - w_3 = -j^2(w_1 - w_3)$

$-j^2 = -e^{i\frac{4\pi}{3}} = \underset{-1}{e^{i\pi}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad$ sinon faire un dessin sachant $e^{i\alpha}$, $-e^{i\alpha}$

De la relation $w_2 - w_3 = -j^2(w_1 - w_3)$

$$w_2 - w_3 = e^{i\pi/3}(w_1 - w_3)$$

On en déduit que $\underbrace{|w_2 - w_3|}_{\Omega_2\Omega_3} = \underbrace{|e^{i\pi/3}|}_{=1}|w_1 - w_3|$

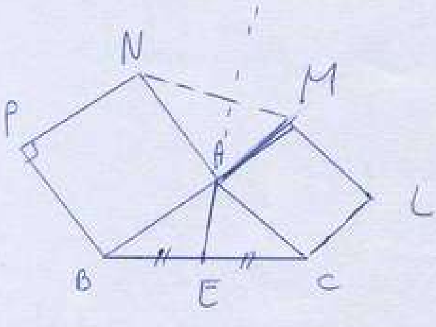
$$\Omega_2\Omega_3 = \Omega_1\Omega_3$$

Donc tr isocèle.

et $(\overrightarrow{\Omega_3\Omega_1}, \overrightarrow{\Omega_3\Omega_2}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Donc $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ triangle équilatéral direct.

Exercice 3 :



On choisit l'origine O en A et on obtient :

$$\begin{cases} m - a = i(c - a) \Rightarrow m = i(c-a) + a \\ n - a = -i(b - a) \Rightarrow n = i(a - b) + a \\ e = \frac{b+c}{2} \end{cases}$$

d'où $n - m = i(a - b - c + a) = i(2a - (b+c))$
$= i(2a - 2e)$
$= 2i(a - e)$

$$\boxed{n - m = 2i(a - e)}$$

$\Updownarrow$

car $\arg\left(\frac{n-m}{a-e}\right) = \arg(2i)$

Donc $(EA) \perp (MN)$

et

$$\boxed{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{MN}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]}$$

et $|n - m| = |2i(a - e)|$

$|n - m| = 2|a - e|$

$\boxed{NM = 2AE}$

Rq : On peut le faire sans fixer de repère.

$a, b, c, m, n,$ et e les affixes respectives

$$\begin{cases} m - a = i(c - a) \\ b - a = i(n - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(m - a) = a - c \\ b - a = i(n - a) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AE} = \frac{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})}{2}$ i.e. $e - a = \frac{c - a + b - a}{2} = \frac{i(a - m) + i(n - a)}{2}$
$= i \cdot \frac{n - m}{2}$