Exposé 18 :

Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

Cadre : Plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0- Pré-Requis :

- complexes : forme algébrique, conjugué.
- bijection entre $\mathbb{C}$ et le plan euclidien.
- Représentation géométrique d'un nombre complexe, en particulier la définition d'affixe.
- Angle orienté de vecteurs. – Thm de l'arc capable.

I Module d'un nombre complexe :

1) Définition :

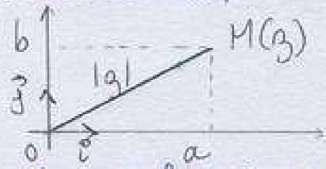
Def : On appelle module d'un nombre complexe $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$ que l'on note $|z|$

Conséquence directe : $|z| = |\bar{z}|$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Rq : $|z|^2 = z\bar{z}$ (car $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$)

2) Interprétation géométrique :

Le module de z correspond dans le plan à la norme euclidienne du vecteur $\vec{OM}$ où M est le point d'affixe z et O l'origine.



$|z| = OM$

car $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\vec{AB}$

Le module de $(z_B - z_A)$ correspond à la norme euclidienne de $\vec{AB}$ ie $|z_B - z_A| = AB$

3) Propriétés

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$
i) $|z| = 0 \iff z = 0$
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$
iii) $|zz'| = |z||z'|$
iv) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$
v) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$z'\bar{z} + z\bar{z}' = (a'+ib')(a-ib) + (a+ib)(a'-ib')$
$= a'a + bb' + i(ba'-ba')$
$+ aa' + bb' + \cancel{i(ba'-b'a)}$
$= 2(aa'+bb')$
$= 2Re(z\bar{z}')$

car $zz' = (aa'-bb', ab'+a'b)$
$z\bar{z}' = (aa'+bb', -ab'+a'b)$

[i) $z = a+ib$ $\sqrt{a^2+b^2} = 0 \iff a^2+b^2 \iff a=b=0$ et $\Leftarrow$ évident.

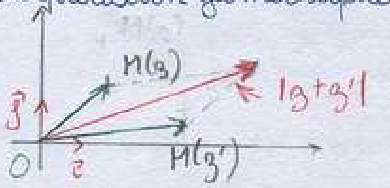
ii) $|\lambda z| = \sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2)} = |\lambda|\sqrt{a^2+b^2} = |\lambda||z|$

iii) $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2$

iv) $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$ car $|\bar{z}| = |z|$

v) $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = z\bar{z} + z'\bar{z}' + z'\bar{z} + z\bar{z}'$
$= |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z\bar{z}') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'|$ $\leq (|z|+|z'|)^2$]

Rq: interprétation géométrique de $|z+z'|$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$



en effet $|z+z'|$ correspond à la longueur de la diagonale du parallélogramme

II Argument d'un nombre complexe :

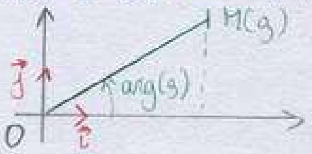
1) Définition :

Def: L'argument d'un complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel $|z| = 1$ est la mesure d'angle α tq $\cos\alpha = Re(z)$, $\sin\alpha = Im(z)$ on note $\alpha = \arg(z)$

L'argument d'un complexe $z \in \mathbb{C}^*$ est l'argument de $\frac{z}{|z|}$

2) Interprétation géométrique :

L'argument de z correspond dans le plan euclidien à l'angle entre l'axe horizontal et le vecteur $\vec{OM}$ où M est le point d'affixe z.



$\arg(z) = (\vec{i}, \vec{OM})\ [2\pi]$ où $M(z)$

Rq: Il n'y a pas unicité de la valeur de $\arg(z)$

Rq: $\operatorname{Arg}(z) = 0\ [\pi] \iff z$ est un réel non nul.

$\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z$ est un imaginaire pur avec $z \neq 0$.

3) Propriétés :

Prop : - $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z)\ [2\pi]$

[Conséquence immédiate de la définition]

Prop: $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls

i) $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$

ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z\ [2\pi]$

iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n \arg(z)\ [2\pi]$

4) Autre interprétation géométrique

Prop: Soit A, B, C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C

i) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \vec{AB})\ [2\pi]$

ii) $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})\ [2\pi]$

III Lignes de niveau :

1) Ligne de niveau de $z \mapsto |z - w|$ où $w \in \mathbb{C}$.

Posons $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$z \longmapsto |z - w|$ $\quad \Gamma_1 = \{ M(z) \in \mathcal{P} \mid f_1(z) = k ; k \in \mathbb{R} \}$

Prop : Si $k < 0$, $\Gamma_1 = \emptyset$
Si $k = 0$, $\Gamma_1 = \{ \Omega \}$ où $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe w.
si $k > 0$, Γ_1 est le cercle de centre Ω et de rayon k

[$k = 0$, $k < 0$ évident. $k > 0$ si $M(z)$ et $\Omega(w)$
alors $|z - w| = M\Omega$ d'après i)
donc l'ensemble des pts $M \in \mathcal{P}$ tq $M\Omega = k > 0$ est un cercle de rayon k]

2) Ligne de niveau de $z \mapsto \left| \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right|$, $z_A, z_B \in \mathbb{C}$

Posons $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $A(z_A)$ et $B(z_B)$
$z \longmapsto \left| \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right|$ $\quad \Gamma_2 = \{ M(z) \in \mathcal{P} \mid f_2(z) = k , k \in \mathbb{R} \}$

Prop : Si $k < 0$ $\Gamma_2 = \emptyset$
si $k = 0$ $\Gamma_2 = \{ A \}$
Si $k = 1$, Γ_2 est la médiatrice de $[AB]$
si $k > 0$ et $k \neq 1$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[IJ]$ avec $I = \text{Bar}\{(A,1),(B,-k)\}$
et $J = \text{Bar}\{(A,1),(B,k)\}$

[$k \leq 0$ évident
si $k = 1$, Soit $M(z) \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \dfrac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$ ie $M \in$ médiatrice $[AB]$

Si $k > 0$ et $k \neq 1$ Soit $M(z) \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA = k MB$ ie $MA^2 = k^2 MB^2$
$\Leftrightarrow (\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0$
$\Leftrightarrow (1-k)\vec{MI} . (1+k)\vec{MJ} = 0$
$\Leftrightarrow \vec{MI} . \vec{MJ} = 0$

ie $M \in$ Cercle de diamètre $[IJ]$]

3) Ligne de niveau $z \mapsto \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right)$, $z_A, z_B \in \mathbb{C}$

Posons $F_k = \{ z \in \mathbb{C} \setminus z_B \mid \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right) = k \ [2\pi] \}$

Thm : Si $k = 0 \ [2\pi]$ $F_k = AB \setminus [AB]$
si $k = \pi \ [2\pi]$ $F_k =]AB[$
Si $k \neq 0 \ [\pi]$ alors F_k est l'arc capable (AB) associé à k

Voir Démo Expo 20
Démo Expo 36

Exposé 18 : Demonstration

Prop : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

$[\![$ $\exists\, \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tq $\arg(z) = \alpha$ et $\arg(z') = \alpha'$

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad z' = |z|(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$$

$$zz' = |zz'|(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'))$$

$$= |zz'|(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha'))\ ]\!]$$

Prop : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$

$[\![$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\arg(z) = \alpha$ ie $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{|z|(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{1}{|z|}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$$

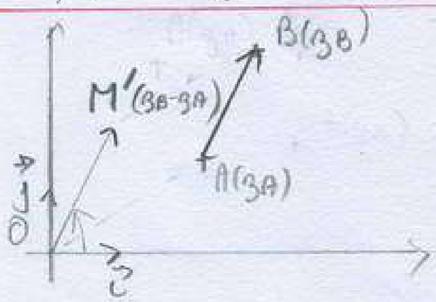
dc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$

Prop : $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

Récurrence en utilisant $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

Prop : A, B, C d'affixes z_A, z_B, z_C $\quad \arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \vec{AB})\ [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})\ [2\pi]$$



$\vec{AB}(z_B - z_A)$

or $\vec{OM'} = \vec{AB}$

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \vec{OM'})\ [2\pi]$$

$$= (\vec{i}, \vec{AB})\ [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left((z_C - z_A) \times \frac{1}{(z_B - z_A)}\right)$$

$$= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$$

$$= (\vec{i}, \vec{AC}) - (\vec{i}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{AC})\ [2\pi]$$