Poly : théorème II n=6
Applications

Exposé 17 :

17 1/2

Racines n-ièmes d'un nombre complexe
Interprétation géométrique. Applications.

0. Pré-Requis

- ~~Relation~~ entre racines et coefficients d'un polynôme.
- nombres complexes (affixe, module, argument)
- formule de Moivre. $\forall n \in \mathbb{N}$ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ($\forall \theta \in \mathbb{R}$)
- définition d'un polygone régulier convexe.

On considère $(P, \vec{P})$ un plan affine euclidien muni d'un rond $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Intro : Le but de cet exposé est de résoudre des équations du type $\boxed{z^n = Z}$ avec $Z \in \mathbb{C}$

I Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

1) Définition et exemple :

Def : Soit $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de Z, tout nombre complexe z solution de l'équation $z^n = Z$

Si $Z = 1$ on parle de racines n-ièmes de l'unité.

Rq : si $Z = 0$ le seul nombre complexe qui vérifie $z^n = 0$ est $z = 0$

Exemple $n = 2$:

Soit $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$

$z^2 = (x+iy)(x-iy) = X + iY$ et $|z|^2 = |Z|$.

$x^2 + 2ixy - y^2 = X + iY$

on obtient $\begin{cases} x^2 - y^2 = X & \text{(parties réelles)} \\ 2xy = Y & \text{(parties imaginaires)} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2+Y^2} & \text{(modules)} \end{cases}$

d'où $x^2 = \dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}$ et $y^2 = \dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}$ d'où $|x| = \sqrt{\dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}}$ et $|y| = \sqrt{y^2}$

car $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$

On en déduit x et y car xy est du signe de Y.

Rq : Cette méthode algébrique est utilisable dans le cas $n = 2$ mais est plus complexe pour n quelconque.

2) Théorème.

Thm 1 : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ tq $Z = |Z| e^{i\theta}$ où θ est un argument de Z admet n racines n-ièmes distinctes données par $z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$

[$Z = |Z| e^{i\theta}$. On suppose que $z = |z| e^{i\alpha}$ est une racine n-ième de Z

alors $z^n = Z \iff |z|^n e^{in\alpha} = |Z| e^{i\theta}$

$\iff |z| = \sqrt[n]{|Z|}$ et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n\alpha = \theta + 2k\pi$

$\iff |z| = \sqrt[n]{|Z|}$ et $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$.

On a donc $z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

De plus si $z_k = z_{k'} \iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n}\ [2\pi] \iff k \equiv k'\ [n]$ donc on a bien n racines distinctes]

3) Propriétés :

Prop i) (Somme) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, la somme des n racines n-ièmes de Z, pour $n \geq 2$ est nulle.

ii) (Produit) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$; $n \geq 1$ le produit des n-racines n-ièmes de Z est égal à $(-1)^{n-1} Z$

[Si $n = 1$: on a bien évidement le ii)

Si $n \geq 2$: $z^n - Z = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})$

$$= z^n - \underbrace{(z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1})}_{} z^{n-1} + \cdots + \underbrace{(-1)^n z_0 \cdots z_{n-1}}_{}$$

équation qui est un polynôme de degré n ↑ égalité de 2 poly donc les coeffs st égaux

$\boxed{\text{On a bien la somme des racines} = 0}$

$$-Z = (-1)^n z_0 \cdots z_{n-1}$$

ie $\boxed{z_0 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1}}$]

4) Racines n-ièmes de l'unité

Thm 2 : L'ensemble $U_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, \ldots, n-1\}$ des racines n-ièmes de l'unité muni de la multiplication est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Prop : Les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par les racines n-ièmes de l'unité.

II. Interprétation géométrique :

Def : Soit $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1} \in \mathcal{P}$. $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ constitue les sommets d'un polygône régulier convexe à n cotés ssi il existe un point O tq la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ transforme pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ M_k en M_{k+1} et M_{n-1} en M_0.

Thm 3 : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ les n racines n-ièmes de Z sont les n affixes des sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$

[$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $M_k \in \mathcal{P}$ a pour affixe $z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right)}$

$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $OM_k = |z_k| = \underline{\sqrt[n]{|Z|}}$

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-2\} \ (\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \arg \frac{(z_{k+1} - 0)}{(z_k - 0)} = \arg\left(\frac{\sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{2(k+1)}{n}\pi + \frac{\theta}{n}\right)}}{\sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \theta/n\right)}}\right)$$

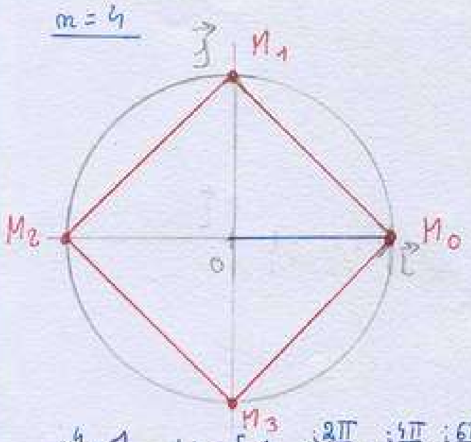
$$= \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) = \underline{\frac{2\pi}{n} \ [2\pi]}$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0}) = \arg \frac{z_0 - 0}{z_{n-1} - 0} = \arg\left(\frac{\sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\theta/n}}{\sqrt[n]{|Z|}\, e^{i\left(\theta/n + \frac{2n-1}{n}\pi\right)}}\right) = e^{i\frac{1-n}{n}2\pi} = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \underline{\frac{2\pi}{n} [2\pi]}$$

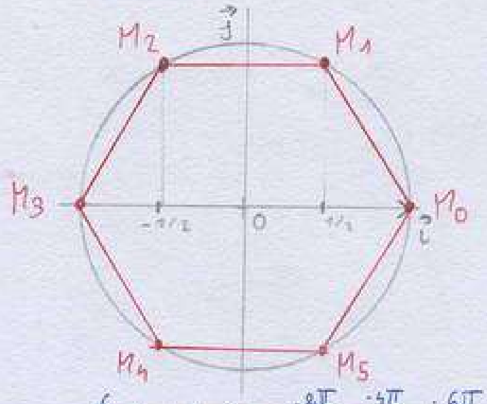
Donc $r\left(O, \frac{2\pi}{n}\right) : M_k \to \begin{cases} M_{k+1} \text{ si } k \in [\![0, n-2]\!] \\ M_0 \text{ si } k = n-1 \end{cases}$]

Exemple : racine n-ièmes de l'unité ie $Z = 1$

$n = 4$



$n = 6$



$z^4 = 1 \quad U_4 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{4}}, e^{i\frac{4\pi}{4}}, e^{i\frac{6\pi}{4}}\}$
$= \{1, e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{i3\pi/2}\}$

$z^6 = 1 \quad U_6 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{6}}, e^{i\frac{4\pi}{6}}, e^{i\frac{6\pi}{6}}, e^{i\frac{8\pi}{6}}, e^{i\frac{10\pi}{6}}\}$

$z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0$ ou $(z^2-1)(z^2+1) = 0$

On en déduit les solutions de $z^2 = -1$

III Applications :

1) Calculer les racines troisièmes de $Z = 27i$

2) Factorisation de $P(x) = x^4 + 1$ dans $\mathbb{C}$

3) Les points $M_0, \dots, M_5$, d'affixe $1+i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, -2, $-1-i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, 2 sont-ils les sommets d'un polygone régulier ?

4) Construction du pentagone régulier à la règle et au compas

Soit $z_a = e^{i2\pi/5}$

a) $1 + z_a + z_a^2 + z_a^3 + z_a^4 = 0$

b) $z_a + \frac{1}{z_a}$ solution de $X^2 + X - 1 = 0$

c) En déduire construction du pentagone régulier à la règle et au compas

Exposé 17 : Démo :

[**Thm 2 :** $U_n = \{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, \dots, n-1 \}$

- $1 \in U_n$ donc U_n non vide.
- Soit $z_1, z_2 \in U_n$ $\exists k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $z_1 = e^{i\frac{2k_1\pi}{n}}$ et $z_2 = e^{i\frac{2k_2\pi}{n}}$

$$z_1 \times z_2 = e^{i\frac{2k_1\pi}{n}} \times e^{i\frac{2k_2\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k_1+k_2)\pi}{n}} \in U_n$$

(faut à mq $k_1 + k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ div euclidienne par n)

- Soit $z_1 \in U_n$, $\exists k_1 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $z_1 = e^{i\frac{2k_1\pi}{n}}$

z_1^{-1} existe et $z_1^{-1} = \dfrac{1}{e^{\frac{2k_1\pi}{n}}} = e^{-\frac{2k_1\pi}{n}} \in U_n$

$$z_1^{-1} = e^{\frac{2(n-k_1)\pi}{n}}$$

Donc U_n sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$]

[**Prop :** Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, $n \geq 1$

Soit z_0 tq $z_0^n = Z$ alors $\exists k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k_0\pi}{n})}$

On pose $G_n = \{ z_0 \times z, z \in U_n \}$ $\quad U_n = \{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \}$

Soit $G_n' = \{ z \in \mathbb{C}$ tq $z^n = Z \} = \{ \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \mathbb{Z} \}$

$$z \in G_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad z = z_0 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + 2\frac{k_0\pi}{n})} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2(k_0+k)\pi}{n})}$$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \quad z = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k'\pi}{n})}$$

$$\Leftrightarrow z \in G_n'$$]

Applications :

Exercice 1 :

$z^3 = 27i \qquad |Z| = 27 \qquad \theta = \operatorname{Arg}(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad Z = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$

donc les 3 racines 3-ièmes de Z sont :

$z_0 = \sqrt[3]{27}\, e^{i(\frac{\pi}{6})}$ $\quad z_1 = \sqrt[3]{27}\, e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})}$ $\quad z_2 = \sqrt[3]{27}\, e^{i(\frac{\pi}{2}/3 + \frac{4\pi}{3})}$

$\boxed{z_0 = 3e^{i\pi/6}}$ $\quad \boxed{z_1 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}}$ $\quad \boxed{z_2 = 3e^{i\frac{9\pi}{6}}}$

Exercice 2 :

$P(x) = x^4 + 1$

On cherche les racines de P : $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ ie $x^4 = Z$ où $|Z| = 1$

donc les 4 racines 4-ièmes de Z sont $\quad \arg(Z) = \pi\ [2\pi]$

$z_0 = e^{i\pi/4} \quad z_1 = e^{i(\pi/4 + \frac{2\pi}{4})} \quad z_2 = e^{i(\pi/4 + \frac{4\pi}{4})} \quad z_3 = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4})}$

ie $\boxed{z_0 = e^{i\pi/4}}$ $\boxed{z_1 = e^{i3\pi/4}}$ $\boxed{z_2 = e^{i5\pi/4}}$ $\boxed{z_3 = e^{i7\pi/4}}$

Exercice 3 :

Les points $M_0, \dots, M_5$ sont ~~de~~ les sommets d'un polygone régulier.
Pour cela on utilise le thm 3 et on montre les affixes sont des racines 6-ièmes d'un nombre complexe Z.

ie $\exists Z \in \mathbb{C}$ tq $z_k^6 = Z$ $k \in \{0, \dots, 5\}$

$z_0 = 2$ $\quad \underline{z_0^6 = 64}$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad |z_1| = \sqrt{1+3} = 2$ $\quad \arg Z = \theta\,[2\pi]$ où $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

donc $z_1 = 2e^{i\pi/3}$ $\quad \arg Z = \frac{\pi}{3}$

$\underline{z_1^6 = 64 e^{i6\pi/3} = 64}$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i2\pi/3} \Rightarrow \underline{z_2^6 = 64}$ Même chose pour z_3, z_4, z_5

Donc $z_0, \dots, z_5$ sont les racines 6-ièmes de $Z = 64$, ce sont donc les sommets...

Exercice 4 :

Soit $\underline{z_0 = e^{i2\pi/5}}$ On considère $z^5 = 1$ $\left\{\begin{array}{l} \text{On a thm 3 les racines} \\ \text{5-ièmes de l'unité (ie } Z = 1) \\ \text{sont les sommet d'un} \\ \text{pentagone régulier} \end{array}\right.$

$U_5 = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k, k = 0, \dots, 4 \right\}$

Comment construire z_1 à la règle et au compas :

a) $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ { Propriété somme des ... = 0)

b) $z_0^2 \left(\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{z_0} + 1 + z_0 + z_0^2 \right) = 0$ or $z_0^2 \neq 0$

ie $\boxed{\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{z_0} + 1 + z_0 + z_0^2 = 0}$ $(*)$

or $\frac{1}{z_0^2} + z_0^2 = \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)^2 - 2$

Donc $(*)$ devient $\underbrace{\left[\frac{1}{z_0^2} + z_0^2 \right]} + \left[\frac{1}{z_0} + z_0 \right] + 1 = 0$

$\left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) - 2 + 1 = 0$

$\left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) - 1 = 0 \iff \boxed{z_0 + \frac{1}{z_0} \text{ sol de } X^2 + X - 1 = 0}$

sol de $x^2+x-1=0$

$x_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\begin{cases} \text{or } z_0 = e^{i2\pi/5} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \quad \frac{1}{z_0} = e^{i\frac{-2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} \\ \frac{1}{z_0} + z_0 = \underbrace{2\cos\frac{2\pi}{5}}_{>0} \text{ car } \cos x \geq 0 \text{ pour } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

or $\frac{1}{z_0}+z_0$ sol de x^2+x-1 ie $\frac{1}{z_0}+z_0 = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ ou $\frac{1}{z_0}+z_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

or comme $\frac{1}{z_0}+z_0 > 0$ on en déduit que $\frac{1}{z_0}+z_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

ie $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

De plus on remarque que $\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{4}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$ ie $\frac{\sqrt{5}}{4}$ hypoténuse d'un triangle rectangle:

On en déduit la construction :