Exposé 16 :

Introduction et construction du Corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.

0- Pré. Requis :
- Notion de corps.
- morphisme de corps
- $\mathbb{R}$ est un corps.

Intro : L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. On va construire un ensemble $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$, possède les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ et dans lequel cette équation admet des solutions.

I Définition du corps des complexes.

1) Construction de $\mathbb{C}$:

Thm : On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$ définies par : $\forall (a,b),(a',b')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $(a,b)+(a',b')=(a+a', b+b')$

$$(a,b)\times(a',b')=(aa'-bb', ab'+a'b)$$

Alors $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

[On vérifie que . $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien (ie $+$ asso, commu, elt (0,0) neutre, tt elt admet sym)
- . $\times$ est associative commutative, $(1,0)$ comme elt neutre et tt elt non nul admet un symétrique
- . $\times$ distributive par rapport à $+$]

Prop : Soit $A=\{(a,0), a\in\mathbb{R}\}$ alors A est un sous corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Thm : L'application $j:\mathbb{R}\to A$, $a\to(a,0)$ est un isomorphisme du corps $(\mathbb{R},+,\times)$ dans le corps $(A,+,\times)$.

[$j(1)=(1,0)$

$\forall a,a'\in\mathbb{R}$ $j(a+a')=(a+a',0)=(a,0)+(a',0)=j(a)+j(a')$

$j(a\times a')=(aa',0)=(a,0)\times(a',0)=j(a)\times j(a')$

$\text{Ker } j=\{0\}$ donc j injective.

Soit $(a,0)\in A$, $j(a)=(a,0)$ donc j surjective]

Conséquence : $\forall a\in\mathbb{R}$, on peut identifier a à $(a,0)$.

Prop : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, (a,b) s'écrit de manière unique sous la forme $(a,0)+(0,1)\times(b,0)$

Rq : $(0,1)\times(0,1)=(-1,0)$

Conséquence :
Si on note $i=(0,1)$ alors tout élément élément (a,b) peut être identifié à $a+ib$ de manière unique.
On définit $\mathbb{C}=\{a+ib, (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ alors l'application $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $(a,b)\to a+ib$ est un isomorphisme de corps.

Thm : $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif appelé corps des complexes.

2) Définitions :

Def : Soit $z \in \mathbb{C}$, $\exists ! (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tq $z = a+ib$. $a+ib$ est appelé forme algébrique du nombre complexe z.

a est appelé partie réelle de z.

b ——————— imaginaire de z.

Notation : $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

Def : Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est un imaginaire pur si $Re(z) = 0$

On dit que z est un réel pur si $Im(z) = 0$.

II _ Propriétés et calculs dans $\mathbb{C}$.

1) Règles de calculs dans $\mathbb{C}$:

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$

i) $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ (calcul)

ii) $(z^2 - z'^2) = (z+z')(z-z')$ (calcul)

iii) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$ (Corps de anneau intègre)

iv) $\forall n \in \mathbb{N}^* \; (z+z')^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}$ (Récurrence.

2) Conjugaison

Def : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On appelle conjugué de z le complexe noté $\bar{z} = a - ib$

Rq : On introduit le conjugué d'un nombre complexe car il permet entre autres d'exprimer facilement sous forme algébrique l'inverse d'un nombre complexe non nul.

Prop : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a+ib$ alors $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

Propriétés : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$

iii) Si $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

iv) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

v) $z - \bar{z} = 2Im(z)$

vi) $\bar{\bar{z}} = z$

vii) $z\bar{z} = a^2 + b^2$ si $z = a+ib$

[En passant sous la forme algébrique on démontre tout facilement]

3) Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

Thm : $z^2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ admet deux racines complexes conjuguées.

[$z^2 = \alpha$ avec $\alpha < 0 \iff z^2 = (i\sqrt{-\alpha})^2$ car on a déjà vu que $i^2 = -1$

$(0,1)(0,1) = (-1,0)$

$\iff z^2 - (i\sqrt{-\alpha})^2 = 0$

$\iff (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$

$\iff z = i\sqrt{-\alpha}$ ou $z = -i\sqrt{-\alpha}$]

Thm : Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

[On suppose $\Delta < 0$

$az^2 + bz + c = 0 \iff a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = 0$

$\iff \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = 0$

$\iff \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ or $b^2 - 4ac = \Delta$

$\iff \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \underbrace{\dfrac{\Delta}{4a^2}}_{<0}$ ie $Z^2 = \alpha$ avec $\alpha < 0$

$\iff Z = i\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}$ et $Z = -i\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}$

$\iff z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$]

4) Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Lemme : Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^2 = \alpha$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$

Rq : Pour démontrer le lemme on introduit le module d'un nb complexe

Thm : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$:

Si $\Delta \neq 0$, deux solutions complexes distinctes

Si $\Delta = 0$, une solution complexe double.

Généralisation : On admettra le théorème suivant démo complexe (Pt homographique ou méthode plus algébrique

Thm (d'Alembert) Tout polynôme à coefficients complexe non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exposé 16 : Démonstration :

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\times)$ corps commutatif :

- $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ groupe abélien
  - $+$ loi associative et commutative (évident)
  - $(a,b)+(0,0)=(a,b)$ dc $(0,0)$ elt neutre de $+$
  - $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$ dc $(-a,-b)$ sym de (a,b)

  $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

- $\times$ loi associative et commutative (évident)

$(a,b)\times(1,0)=(a,b)\ \forall a,b$ ie $(1,0)$ elt neutre de $\times$

soit $(a,b)\neq(0,0)$ $(a,b)\times(c,d)=(1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=\dfrac{-b}{a^2+b^2} \\ c=\dfrac{a}{a+b^2}\end{cases}$

- $\times$ distributive / à $+$

$[(a,b)+(a',b')]\times(a'',b'')=\ldots$

$(b+ic)(b-ic)=b^2$

Lemme : $z^2=\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ admet 2 solutions dans $\mathbb{C}$

Lemme : on introduit le module de z : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ où $z=a+ib$. Prop : si $z=z'$, $z,z'\in\mathbb{C}$ $|z|=|z'|$

[$z=x+iy$ et $\alpha=b+ic$

$z^2=x^2+2ixy-y^2$ donc $\begin{cases}x^2-y^2=b\\ 2xy=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=b\\ 4x^2y^2=c^2\\ sg(xy)=sg(c)\end{cases}$

or $z^2=\alpha$ $|z|^2=|\alpha|$

$\Leftrightarrow (z\bar{z})^2=\alpha\bar{\alpha}$

donc $\begin{cases}x^2-y^2=b\\ x^2+y^2=\sqrt{b^2+c^2}\\ 2xy=c\end{cases}\Leftrightarrow$

$2x^2=b+\sqrt{b^2+c^2}$

$x^2=\dfrac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\Leftrightarrow \boxed{x=\sqrt{\dfrac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{2}}}$

$\Leftrightarrow -2y^2=b-\sqrt{b^2+c^2}$

$y^2=\dfrac{b-\sqrt{b^2+c^2}}{-2}$

$\boxed{y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}-b}{2}}}$

$x^2+y^2=\sqrt{b^2+c^2}$ (1)

$z\bar{z}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$

car $b<\sqrt{b^2+c^2}$ car $c\neq0$

si $c=0$ on est ramené à la partie où coefficients réels.

Thm :

$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow a\left(z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ où $\Delta=b^2-4ac$

$\Leftrightarrow$ ie. $X^2=\alpha$ où $\alpha\in\mathbb{C}^*$

… On trouve le résultat souhaité.