Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels

Niveau DEUG

Prérequis
- structure algébrique (groupe, anneau, corps)
- relation d'équivalence, classe d'équivalence
- relation d'ordre
- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif ordonné

1 Définition de $\mathbb{Q}$

1.1 Proposition

Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, on considère la relation binaire définie par

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \forall (a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \quad (a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')$ ssi $ab'=a'b$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

Preuve

- réflexive $\quad ab=ab$ donc $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b)$
- transitive $\quad (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f) \Rightarrow ad=bc$ et $cf=de$

$\Rightarrow adcf = bcde \overset{\text{si } c\neq 0}{\Rightarrow} af=be \Rightarrow (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$

si $c=0$ $\quad a=0$ et $e=0$ donc $af=be \Rightarrow (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$

- symétrique $\quad (a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b') \Leftrightarrow ab'=a'b \Leftrightarrow a'b=ab' \Leftrightarrow (a',b')\,\mathcal{R}\,(a,b)$

1.2 Définition et notation

L'ensemble quotient $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathcal{R})$ est appelé l'ensemble des rationnels

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathcal{R})$ est noté $\mathbb{Q}$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ c'est à dire les classes d'équivalence sont appelés fractions et noté $\frac{a}{b}$

Exemple $\dot{\overline{(2,6)}} = \dot{\overline{(1,3)}}$ $\quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1.3 Propriétés

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} = \frac{ak}{bk}$

2. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, si $\exists c \in \mathbb{Z}^*$ tq $a = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{bc}{b} = \frac{c}{1}$

3. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$.

On peut alors considéré $b>0$ et ainsi $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/\mathcal{R})$

4. $\forall \left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}$ $\quad a \neq 0$ $\exists! (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ $\frac{a}{b} = \frac{\varepsilon p}{q}$ $\varepsilon = \pm 1$ tq pgcd$(p,q) = 1$

Tout rationnel peut s'écrire de manière unique $\frac{p}{q}$ avec pgcd $(p,q) = 1$, on l'appelle fraction irréductible

Preuve Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

1) Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ $\quad akb = kab$ et $kabk = akkb$

donc $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ et $\frac{ka}{kb} = \frac{ak}{kb}$

2) $\exists c \in \mathbb{Z}^*$ tq $a = bc$ alors $ab = bbc \iff \frac{a}{b} = \frac{bc}{b}$

d'après 1) $\frac{c}{1} = \frac{bc}{b}$

3) $ab = ab \iff a(-b) = (-a)b \iff \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$

Si $b \notin \mathbb{N}$ on a $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $(-b) \in \mathbb{N}^*$ et $(-a) \in \mathbb{Z}$

donc $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathcal{R}) \subset (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/\mathcal{R})$ d'où l'égalité

4) Soit $x \in \mathbb{Q}$ $\exists (a,b) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x = \frac{a}{b}$

Soit $c = \text{pgcd}(|a|,b) \neq 0$ alors $\exists (a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $\begin{cases} a = ca' \\ b = cb' \end{cases}$

$\frac{a}{b} = \frac{ca'}{cb'} = \frac{a'}{b'}$ et pgcd $(a',b') = 1$

. Soient $(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x = \frac{c}{d}$ et pgcd $(c,d) = 1$

$\frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \iff a'd = cb'$

$\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } cb' \\ d \text{ premier avec } c \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{th Gauss}}$ d divise b'

$\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $dk = b'$ d'où $a'd = cdk \Rightarrow a' = ck$

donc k divise b' et k divise a' donc $k = 1$ car pgcd $(a',b') = 1$

$a' = c$ et $b' = d$

2. Structure de $\mathbb{Q}$

2.1 Définition de lois sur $\mathbb{Q}$

Définition

On définit sur $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)$ deux lois internes $+$ et $\times$ telles que
$\forall (a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \forall (a',b')\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ $\quad (a,b)+(a',b') = (ab'+ba', bb')$
$$(a,b)\times(a',b') = (aa', bb')$$

Remarques . $\forall b,b' \in \mathbb{Z}^*$ $bb'\in\mathbb{Z}^*$ car $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre
. Les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives

Propriété

$\mathcal{R}$ est compatible avec les lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

Preuve . $+$ et $\times$ étant commutatives, on doit juste vérifier la compatibilité à droite ou à gauche

$(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b') \iff ab'=a'b$ $\qquad (c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d') \iff cd'=dc'$

. $(a,b)+(c,d)=(ad+bc, bd)$ $\qquad (a',b')+(c',d')=(a'd'+b'c', b'd')$

$(ad+bc)b'd' = ab'dd'+bcb'd'$ $\qquad (a'd'+b'c')bd = a'bdd'+b'c'bd = ab'dd'+bb'cd'$

donc $(ad+bc)b'd'=(a'd'+b'c')bd$ d'où $(ad+bc, bd)\,\mathcal{R}\,(a'd'+b'c', b'd')$

$(a,b)+(c,d)\,\mathcal{R}\,(a',b')+(c',d')$

. $(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$ $\qquad (a',b')\times(c',d')=(a'c',b'd')$

$(ac)(b'd') = ab'cd' = a'bc'd = (a'c')(bd) \implies (a,b)\times(c,d)\,\mathcal{R}\,(a',b')\times(c',d')$

On peut donc munir $\mathbb{Q}$ des lois quotients $+$ et $\times$
Soient $x,x'\in\mathbb{Q}$, $\exists (a,b),(a',b')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x=\frac{a}{b}$ $\quad x'=\frac{a'}{b'}$

$x+x' = \frac{a}{b}+\frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'}$ $\quad$ et $\quad x\times x' = \frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$

2.2. Le corps $\mathbb{Q}$

Théorème

$(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps commutatif.

Preuve

- $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe abélien d'élément neutre $\frac{0}{1}$

\+ est commutative et associative

\- $\frac{0}{1}$ est l'élément neutre

\- $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1}$ $\quad \frac{-a}{b}$ symétrique de $\frac{a}{b}$

- $(\mathbb{Q}^*,\times)$ est un groupe abélien d'élément neutre $\frac{1}{1}$

\- $\times$ est commutative et associative

\- $\frac{1}{1}$ est l'élément neutre

\- $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ donc $a \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$

- $\times$ est distributive par rapport à $+$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) \times \left(\frac{a''}{b''}\right) = \left(\frac{ab'+a'b}{bb'}\right)\left(\frac{a''}{b''}\right) = \frac{ab'a''+a'ba''}{bb'b''}$$

$$\frac{aa''}{bb''} + \frac{a'a''}{b'b''} = \frac{aa''b'b''+a'a''bb''}{bb''b'b''} = \frac{ab'a''+a'a''b}{bb'b''}$$

Remarque Tout élément de $\mathbb{Q}^*$ est inversible car $(\mathbb{Q}^*,\times)$ groupe donc toute équation de la forme $bx = a$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ admet une unique solution $\frac{a}{b}$ (mettre après 2 3 car $b = \frac{b}{1}$)

2.3 Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\qquad a \longmapsto \frac{a}{1}$

j est un homomorphisme injectif de $(\mathbb{Z},+,\times)$ dans $(\mathbb{Q},+,\times)$

$(\mathbb{Z},+,\times)$ est isomorphe à un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$

Preuve

- $(\mathbb{Z},+,\times)$ et $(\mathbb{Q},+,\times)$ sont des anneaux

- $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad j(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = j(a) + j(b)$

$\qquad j(a\times b) = \frac{a\times b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = j(a) \times j(b)$

$j(1) = \frac{1}{1}$

- j injective $\quad j(a) = j(b) \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow (a,1)\,\mathcal{R}\,(b,1) \Leftrightarrow a = b$

- j homomorphisme injectif $(\mathbb{Z},+,\times)$ et $(\mathbb{Q},+,\times)$ anneaux

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(j)$ est un sous anneaux de $(\mathbb{Q},+,\times)$

Remarque

On peut donc identifier $\mathbb{Z}$ à $j(\mathbb{Z})$

3_ Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\exists (a,b)(a',b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' = a'b$$
$$\iff ab'bb' = a'bbb' \quad (\text{car } bb' \neq 0)$$
$$\iff abb'^2 = a'b'b^2$$
$$\implies ab \text{ et } a'b' \text{ sont de meme signe}$$

Donc _ soit tous les couples $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x = \frac{a}{b}$ sont tq $ab \in \mathbb{N}^*$

_ soit tous les couples $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x = \frac{a}{b}$ sont tq $-ab \in \mathbb{N}^*$

Définition

Soit $x \in \mathbb{Q}^*$, $x = \frac{a}{b}$ $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$

Si $ab \in \mathbb{N}^*$ x est appelé rationnel strictement positif

Si $-ab \in \mathbb{N}^*$ x est appelé rationnel strictement négatif.

Notation

$\mathbb{Q}_+^*$ ensemble des rationnels strictements positifs

$\mathbb{Q}_-^*$ ______________________ négatifs

$\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\}$ $\mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\}$

Propriété

On définit sur $\mathbb{Q}$ la relation binaire $\leqslant$:

$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$ $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{Q}^+$

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$

Preuve

. reflexivité $x - x \in \mathbb{Q}^+ \implies x \leqslant x$

. transitivité $(x,y,z) \in \mathbb{Q}$ $x \leqslant y$ et $y \leqslant z \implies y - x \in \mathbb{Q}^+$ et $z - y \in \mathbb{Q}^+$

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}_+$ $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'}$ $abb'^2 + a'b'^2b \in \mathbb{N}$

donc $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}_+$

donc $(z-y)+(y-x) \in \mathbb{Q}^+$ donc $z - x \in \mathbb{Q}_+$ $x \leqslant z$

. antisymétrie $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow y-x \in \mathbb{Q}_+$ et $x-y \in \mathbb{Q}_+$

si $z \in \mathbb{Q}_+$ et $-z \in \mathbb{Q}_+$ alors $z = 0$

donc $y-x = 0$ $x = y$

. ordre total $(x,y) \in \mathbb{Q}$ $x-y = z$

Soit $z = 0$, soit $z \in \mathbb{Q}_+^*$, soit $z \in \mathbb{Q}_-^*$

soit $z \in \mathbb{Q}_+$, soit $(-z) \in \mathbb{Q}_+$

donc $x \leq y$ ou $y \leq x$

Théorème

$\leq$ est compatible avec $+$ sur $\mathbb{Q}$

$\leq$ est compatible avec $\times$ sur $\mathbb{Q}^+$

Preuve

. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3$ $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{Q}_+$

$\Leftrightarrow y-z+z-x \in \mathbb{Q}_+$

$\Leftrightarrow (y+z)-(x+z) \in \mathbb{Q}_+$

$\Leftrightarrow x+z \leq y+z$

. Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}_+$ $\forall z \in \mathbb{Q}_+$

$x \leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{Q}_+$

$\Rightarrow z(y-x) \in \mathbb{Q}_+$

$\Rightarrow zy - zx \in \mathbb{Q}_+$

$\Rightarrow zx \leq zy$

Rq $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ prolonge $\leq$ sur $\mathbb{Z}$

Ccl $\mathbb{Q}$ possède encore d'autre propriété non évoquées notamment $\mathbb{Q}$ est dénombrable