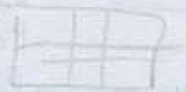
Exposé 1 :

Utilisation d'arbres, de tableaux de diagrammes) pour des exemples simples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.

Exemple introductif



← dénombrer le nb de carré

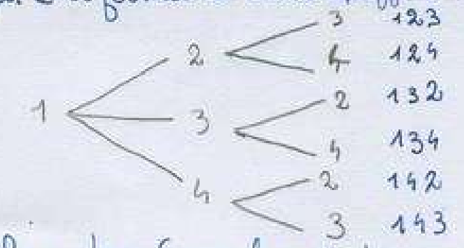
0. Pré Requis :

- Raisonnement par récurrence.
- Cardinal d'un ensemble.

I Exemples simples de dénombrement

1) Arbres :

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et on cherche les nombres commençant par 1 et formés de trois chiffres distincts de E.



Il y a donc 6 nombres distincts répondant à la question.

On remarque que $6 = 3 \times 2$ et on peut conjecturer le résultat suivant :

Prop. (Principe multiplicatif)
Lorsqu'une situation comporte p étapes offrant respectivement $m_1, m_2, \dots, m_p$ possibilités (où chaque m_i ne dépend que de l'étape i), le nombre totale d'issues est $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_p$.

[Récurrence sur p
Si $p = 1$, le résultat est trivial.
Si le résultat est vrai au rang p, considérons un arbre A construit à partir de $p+1$ étapes et notons A_p l'arbre contenu dans le précédant et correspondant aux p premières étapes.
L'hypothèse de récurrence montre que l'arbre A_p à $m_1 \times \dots \times m_p$ branches. Chacunes de ces branches donne naissance à m_{p+1} branches supplémentaires si bien que l'arbre A possèdera $m_1 \times \dots \times m_{p+1}$ branches]].

2) Tableaux :

On lance simultanement deux dés, un blanc, un noir. On fait la somme de ces deux résultats. Combien y-a-t-il de façons d'obtenir 6.

2 dés ≠ important

B \ N	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

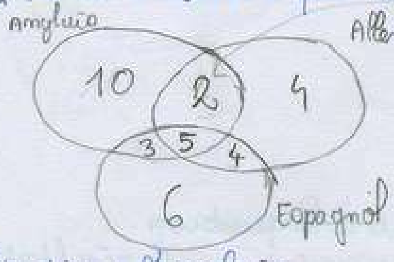
Il y a 5 possibilités.

3) Diagrammes :

Dans une classe, on étudie 3 langues : l'anglais, l'allemand et l'espagnol.
On suppose que chaque élève étudie au moins une langue et on a :
- 5 élèves étudient les trois langues.
- 7 ———— l'anglais et l'allemand
- 9 ———— l'allemand et l'espagnol
- 8 ———— l'anglais et l'espagnol
- 20 élèves ———— l'anglais
- 15 ———— l'allemand
- 18 ———— l'espagnol.

Combien d'élèves étudient que l'anglais ?

car $5+2=7$ allemand + anglais



10 élèves étudient l'anglais.

Prop : Soit E un ensemble fini et A et B des parties de E.
si A et B sont disjoints $card(A\cup B) = card(A) + card(B)$
sinon $card(A\cup B) = card(A) + card(B) - card(A\cap B)$

II Dénombrement des arrangements et des permutations :

Soit E un ensemble de cardinal fini $n\in\mathbb{N}^*$ et on note $E=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$

Def : On appelle p-liste d'éléments de E toute suite ordonnée $(x_1, \dots, x_p)$ où pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i\in E$

Rq : - une p-liste est un élément de E^p
- les x_i peuvent être répétés.

Thm : Le cardinal de l'ensemble des p-listes d'éléments de E est n^p avec $card(E) = n$.

[On considère l'expérience à p étapes dont chaque étape est : « choix d'un élément de E parmi les n »
Alors chaque étape offre n possibilités et on peut donc appliquer la règle du principe multiplicatif pour obtenir le résultat.

Def : On suppose $p\leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.

On appelle permutation de E un arrangement de n éléments de E.

Thm : Le nombre d'arrangements de p éléments de E est noté A_n^p
et $A_n^p = n\times(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$

Le nombre de permutations de E est noté $n!$ et $n! = n\times(n-1)\times\dots\times 2\times 1$

[On construit un arbre comprenant p étapes.

La première étape consiste à choisir un élément x_1' parmi les n éléments de E et à le placer en première position dans la p-liste.

La 2ème étape consiste à choisir un elt x_2' parmi les (n-1) restants de E et à le placer en 2ème position

...

Au bout de p étapes, on obtient une suite $(x_1', \dots, x_p')$ d'éléments distincts de E et une branche de l'arbre.

Le principe multiplicatif démontre $n\times(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$ suites possibles et autant de branches possibles].

Rq : Par convention, si $p>n$ $A_n^p = 0$ et si $p=0$ $A_n^0 = 1$

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

III. Exemples :

Exemple 1 :

Nombre de façons de ranger 4 voitures dans un parking de 6 places : A_6^4

——— 6 ——— ——— $6!$

Exemple 4 :

Une urne contient quatre boules de couleurs différentes.
On effectue quatre tirages successifs.
Nombre de tirages possibles dans le cas :

- Avec remise : 4^4
- Sans remise : $4!$