

Correction et barème.

Activités numériques (12 points)

Exercice 1 : (0,5 points par réponses)

Réponses :

$$1 \rightarrow 0,028$$

$$2 \rightarrow 5\sqrt{2}$$

$$3 \rightarrow \frac{5}{16}$$

$$4 \rightarrow \frac{5}{6}$$

$$5 \rightarrow \frac{12}{5}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) Développer et réduire D (1 point)

$$\begin{aligned} D &= (3x + 1)^2 - 4 \\ &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 - 4 \\ &= 9x^2 + 6x + 1 - 4 \\ \boxed{D} &= \boxed{9x^2 + 6x - 3} \end{aligned}$$

2) Factoriser D (1 point)

$$\begin{aligned} D &= (3x + 1)^2 - 4 \\ &= (3x + 1 - 2)(3x + 1 + 2) \\ \boxed{D} &= \boxed{(3x - 1)(3x + 3)} \end{aligned}$$

3) Calculer D pour $x = \sqrt{2}$ (0,5 points)

Pour $x = \sqrt{2}$, on a :

$$\begin{aligned} D &= 9 \times (\sqrt{2})^2 + 6 \times \sqrt{2} - 3 \\ &= 9 \times 2 + 6\sqrt{2} - 3 \\ \boxed{D} &= \boxed{15 + 6\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4) Résoudre l'équation : $(3x + 3)(3x - 1) = 0$ (2 points)

$$(3x - 1)(3x + 3) = 0$$

Si un produit est nul, alors l'un de ses facteurs est nul.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Soit : } 3x + 3 &= 0 \\ \boxed{x} &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } 3x - 1 &= 0 \\ \boxed{x} &= \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$S = \{-1 ; \frac{1}{3}\}$$

5) Factoriser : $E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$ (1 point)

$$\begin{aligned} E &= (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2) \\ &= (3x + 2) [(3x + 2) - (5 - 2x)] \\ &= (3x + 2) [3x + 2 - 5 + 2x] \\ \boxed{E} &= \boxed{(3x + 2)(5x - 3)} \end{aligned}$$

Exercice 3 : (5 points)

- 1) Sans aucun calcul, expliquez pourquoi on peut simplifier la fraction $\frac{4114}{7650}$ (0,5 point)

Les nombres 4114 et 7650 sont tous les deux pairs.

- 2) Calculer le PGCD des nombres 4114 et 7650 avec la méthode de votre choix et en détaillant vos calculs (1,5 point)

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(7650 ; 4114) &= \text{PGCD}(4114 ; 3536) \\ &= \text{PGCD}(3536 ; 578) \\ &= \text{PGCD}(578 ; 68) \\ &= \text{PGCD}(68 ; 34)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{PGCD}(7650 ; 4114) = 34}$$

- 3) Rendre irréductible la fraction $\frac{4114}{7650}$ en précisant par quel nombre vous simplifiez (1,5 points)

$$\boxed{\frac{4114}{7650} = \frac{4114 \div 34}{7650 \div 34} = \frac{121}{225}}$$

- 4) En utilisant les résultats des questions précédentes, mettre l'expression A suivante sous la forme $n\sqrt{34}$ où n est un entier relatif en détaillant les calculs : (1,5 points)

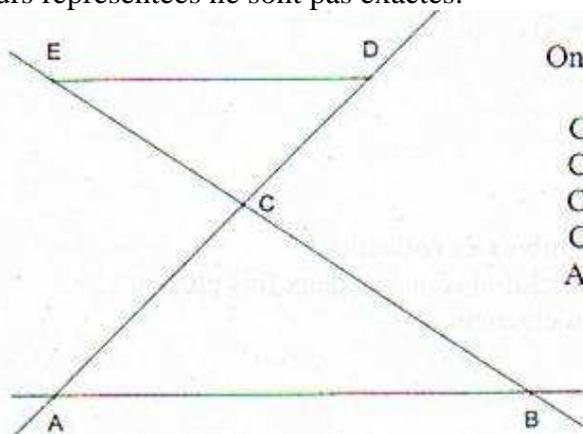
$$\begin{aligned}A &= 5\sqrt{4114} - 4\sqrt{7650} \\ &= 5\sqrt{121 \times 34} - 4\sqrt{225 \times 34} \\ &= 5 \times \sqrt{121} \times \sqrt{34} - 4 \times \sqrt{225} \times \sqrt{34} \\ &= 5 \times 11 \times \sqrt{34} - 4 \times 15 \times \sqrt{34} \\ &= 55\sqrt{34} - 60\sqrt{34}\end{aligned}$$

$$\boxed{A = -5\sqrt{34}}$$

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1 : (6 points)

La figure suivante est donnée à titre indicatif pour préciser la position des points A, B, C, D et E. Les longueurs représentées ne sont pas exactes.



On donne :

$$\begin{aligned}CE &= 5 \\CD &= 12 \\CA &= 18 \\CB &= 7,5 \\AB &= 19,5\end{aligned}$$

- 1) Montrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles. (2 points)

Les droites (EB) et (AD) sont sécantes en C.

Les points A, C et D sont alignés dans cet ordre, tout comme les points B, C, E

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\frac{CA}{CD} &= \frac{18 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{3}{2} \\ \frac{CB}{CE} &= \frac{7,5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{CA}{CD}\end{aligned}$$

Donc, selon le théorème réciproque de Thalès, les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

- 2) Montrer que $ED = 13 \text{ cm}$ (2 points)

Les droites (EB) et (AB) sont sécantes en C.

De plus, les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

Donc, selon le théorème de Thalès, on a :

$$\begin{aligned}\frac{CA}{CD} &= \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{ED} \\ \frac{3}{2} &= \frac{19,5 \text{ cm}}{ED} \\ \boxed{ED} &= \frac{19,5 \text{ cm} \times 2}{3} = 13 \text{ cm}\end{aligned}$$

- 3) Montrer que le triangle CED est un triangle rectangle (2 points)

Dans le triangle CED, on a :

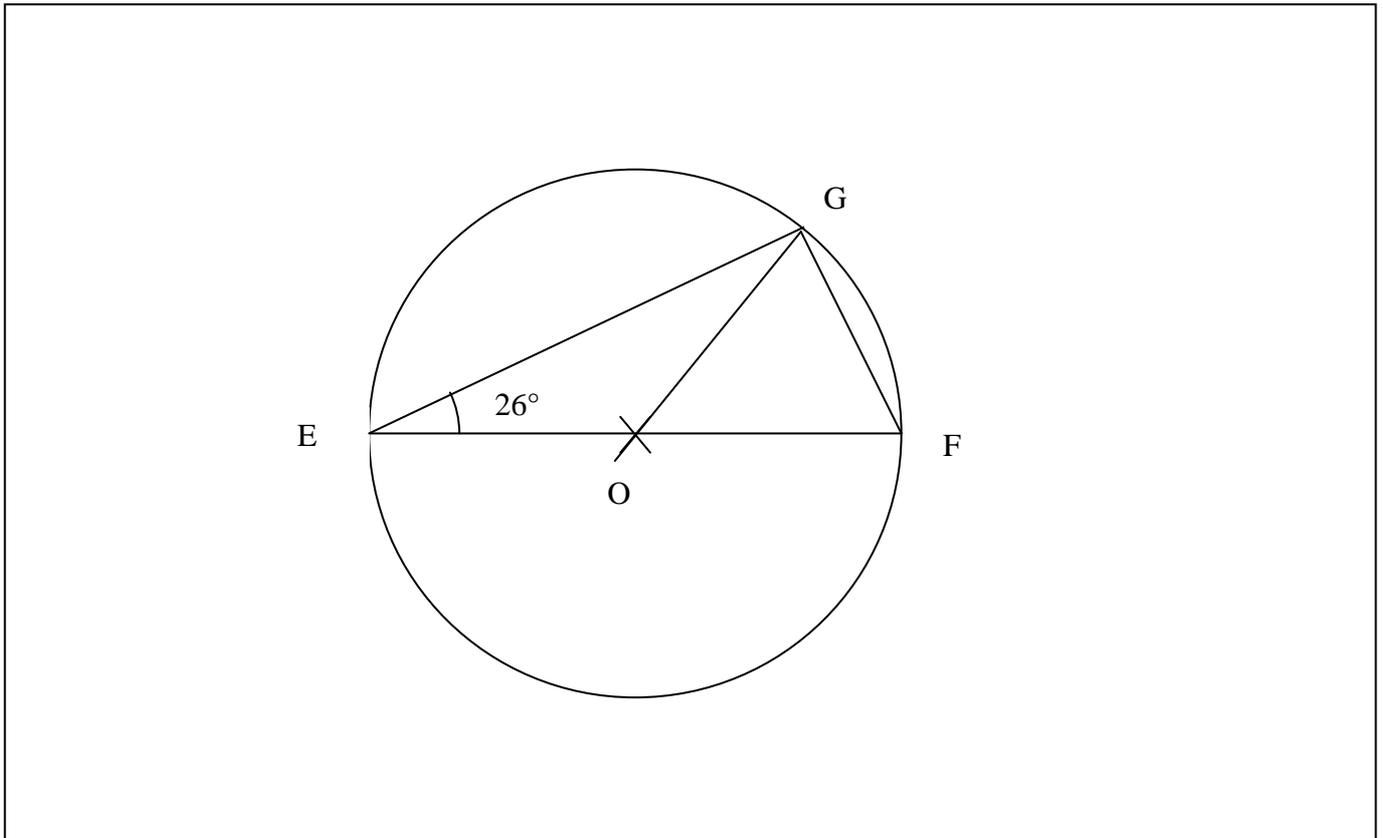
$$\begin{aligned}CE^2 + CD^2 &= (5 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 \\ &= 25 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2 \\ &= 169 \text{ cm}^2 \\ &= (13 \text{ cm})^2\end{aligned}$$

$$\boxed{CE^2 + CD^2 = ED^2}$$

Donc selon le théorème réciproque de Pythagore, le triangle DEC est rectangle en C.

Exercice 2 (6 points)

- 1) Tracer sur la copie un segment [EF] de longueur 7 cm et de milieu O. Tracer le cercle de diamètre [EF] puis placer un point G sur le cercle tel que: $\widehat{FEG} = 26^\circ$. (1 point)



- 2) Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G. (2 points)

Le triangle EFG a le côté [EF] qui est un diamètre de son cercle circonscrit, donc EFG est rectangle en G.

- 3) Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre. (2 points)

Le triangle EFG est rectangle en G, on a donc :

$$\widehat{\text{Sin}}(E) = \frac{FG}{EF}$$

$$\text{Donc, } FG = \text{Sin}(26^\circ) \times 7 \text{ cm} \approx 3,1 \text{ cm}$$

- 4) Déterminer la mesure de l'angle \widehat{GOF} (justifier votre réponse). (1 point)

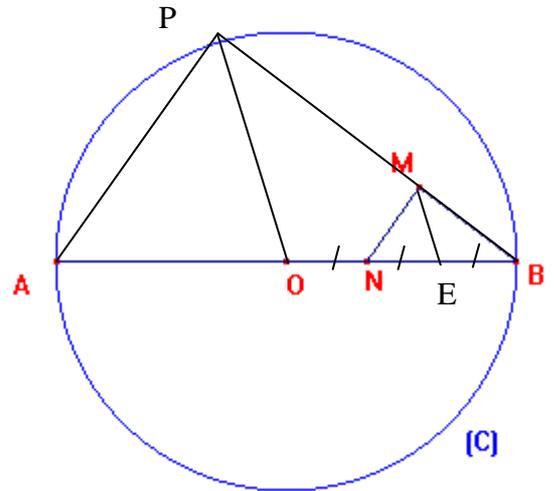
L'angle au centre \widehat{GOF} et l'angle inscrit \widehat{GEF} interceptent le même arc GF. Donc on a :
 $\widehat{GOF} = 2 \widehat{GEF} = 2 \times 26^\circ = 52^\circ$

Problème (12 points)

Problème

On donne:

- un cercle (C) de centre O et de rayon 6 cm ;
- un diamètre [AB] de ce cercle (C)
- le point N du segment [OB] tel que : $BN = 4$ cm;
- le point M situé à 3,2 cm de B et tel que le triangle BMN est rectangle en M.



- 1)
- a. Calculer la longueur du segment [MN]. (2 points)

Le triangle MNB est rectangle en M, donc selon le théorème de Pythagore, on a :

$$MN^2 + MB^2 = NB^2$$

$$MN^2 + (3,2 \text{ cm})^2 = (4 \text{ cm})^2$$

$$MN^2 = 16 \text{ cm}^2 - 10,24 \text{ cm}^2$$

$$MN^2 = 5,76 \text{ cm}^2$$

$$MN = \sqrt{5,76} \text{ cm} \approx 2,4 \text{ cm}$$

- b. Calculer la mesure de l'angle \widehat{MBN} (arrondir à un degré près). (2 points)

Le triangle MNB est rectangle en M, on a donc :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{BM}{BN} = \frac{3,2}{4}$$

$$\text{Donc, } \widehat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{3,2}{4}\right) \approx 37^\circ$$

- 2)
- a. Démontrer que le triangle BPA est rectangle en P. (1 point)

Le triangle APB a le côté [AB] qui est un côté de son cercle circonscrit, donc il est rectangle en P.

- b. En déduire que les droites (PA) et (MN) sont parallèles. (1 point)

Les droites (AP) et (PM) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (PB) donc elles sont parallèles entre elles.

- 3) On sait maintenant que le triangle BPA est un agrandissement du triangle BMN.
a. Calculer le coefficient d'agrandissement.(1 point)

Si on note k le coefficient d'agrandissement de BMN, on a :

$$k = \frac{AB}{BN} = \frac{12}{4} = 3$$

- b. Calculer BP.(1 point)

$$BP = k \times BM$$

$$BP = 3 \times 3,2 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm}$$

- c. Calculer l'aire du triangle BMN et en déduire l'aire du triangle BPA. (0,5 + 1 point)

$$\begin{aligned} \text{Aire (BMN)} &= \frac{BM \times BN}{2} \\ &= \frac{2,4 \text{ cm} \times 3,2 \text{ cm}}{2} \\ &= 3,84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Le triangle BAP est l'agrandissement de coefficient 3 du triangle BMN, donc on a :

$$\text{Aire (BAP)} = 3^2 \times \text{Aire (BMN)} = 9 \times 3,84 \text{ cm}^2 = 34,56 \text{ cm}^2$$

- 4) Soit E le milieu de [BN]. Démontrer que les droites (PO) et (ME) sont parallèles. (2,5 point)

Dans le triangle BPO, on a :

$$M \in [BP]$$

$$E \in [OB]$$

$$\text{Avec : } \frac{BE}{BO} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{BM}{BP} = \frac{3,2}{9,6} = \frac{1}{3} = \frac{BE}{BO}$$

Donc selon le théorème réciproque de Thalès, les droites (PO) et (ME) sont parallèles.